

Κεφάλαιο 2

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της προσέγγισης των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0$, όπου f πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

- Αν η f είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, τότε η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ δίνεται από τον τύπο $x = -\frac{b}{a}$.
- Αν η f είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, τότε οι δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Υπάρχουν τύποι για πολυωνυμικές εξισώσεις 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού (N. Tartaglia, L. Ferrari, G. Cardano) αλλά οι τύποι αυτοί είναι αρκετά πολύπλοκοι. Για παράδειγμα, η πραγματική λύση $\hat{x}$ της εξίσωσης 3^{ου} βαθμού $x^3 - x - 1 = 0$ υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο του Cardano $\hat{x} = \frac{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}}{6}$.
- Για γενικές πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ≥ 5 έχει αποδειχθεί θεωρητικά (N. H. Abel) ότι οι υπάρχουσες ρίζες δεν μπορούν να υπολογιστούν με ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πράξεων.
- Γενικά, για μια μη γραμμική εξίσωση, όπως για παράδειγμα για την $\cos x - x = 0$, δεν περιμένουμε να υπάρχουν τύποι για τον ακριβή προσδιορισμό των ριζών της.

Αρα, θα πρέπει να αναπτύξουμε μεθόδους για την προσέγγιση των ριζών μιας εξίσωσης. Οι μέθοδοι που θα μελετήσουμε είναι συνήθως επαναληπτικές. Δηλαδή, ξεκινούν από μια αρχική προσέγγιση μιας ρίζας και εφαρμόζοντας κάποια διαδικασία επαναληπτικά παράγουν μία ακολουθία προσεγγίσεων που συγκλίνει με κατάλληλες υποθέσεις στη ρίζα της εξίσωσης. Η εύρεση μιας "καλής" αρχικής προσέγγισης είναι σημαντική. Ανάλογα την περίπτωση αρχικές τιμές μπορεί να βρεθούν από μια αναλυτική μελέτη της f ή πολλές φορές μπορεί να εκτιμηθούν εύκολα όταν είναι γνωστή η περιοχή τιμών της λύσης. Άλλα ζητήματα που θα μας απασχολήσουν στο παρόν κεφάλαιο είναι η εκτίμηση σφάλματος αλλά και η ταχύτητα σύγκλισης, που εξαρτάται από τις ιδιότητες της συνάρτησης f και από τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε.

2.2 Εντοπισμός ριζών

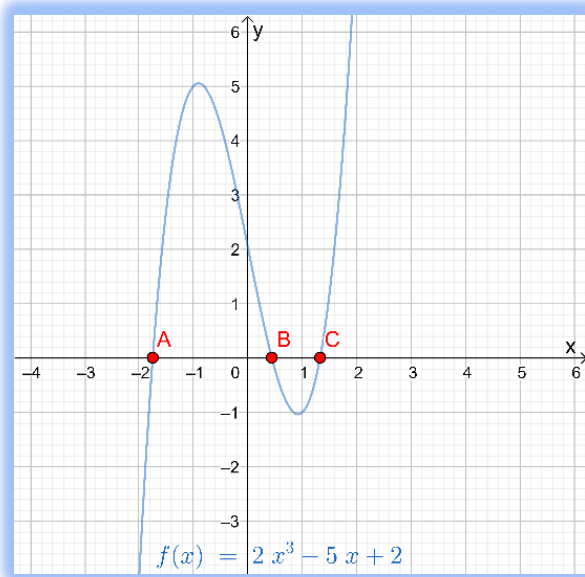
Θεωρούμε μια μη γραμμική εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$, όπου f μια πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x . Η εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης απαιτεί τον εντοπισμό με κάποια διαδικασία ενός ή περισσότερων διαστημάτων που να περιέχουν τη ρίζα ή τις ρίζες της f . Ο εντοπισμός αυτός συνήθως γίνεται γραφικά, ή με χρήση του θεωρήματος Bolzano.

2.2.1 Γραφικός εντοπισμός

Όταν είναι εφικτό, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f , από όπου μπορούμε να εντοπίσουμε τα διαστήματα που περιέχουν τις πραγματικές ρίζες της f . Συχνά είναι προτιμότερο η εξίσωση $f(x) = 0$ να

γραφεί στη μορφή $f_1(x) = f_2(x)$, όπου f_1, f_2 είναι συναρτήσεις με απλούστερες γραφικές παραστάσεις, σε σχέση με την f , οπότε αντί να αναζητούμε τις ρίζες της f αναζητούμε τις τετμημένες των σημείων τομής (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f_1 και f_2 .

Παράδειγμα 2.1

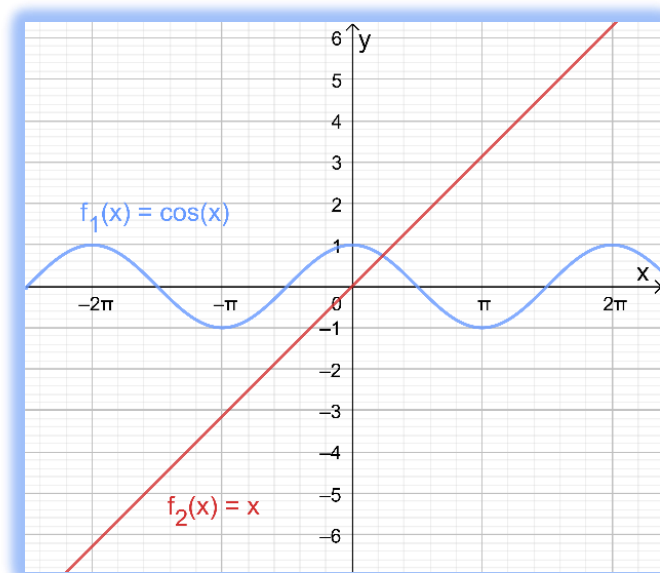


Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$

Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται από το γράφημα της $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ ότι η f έχει ρίζες στα διαστήματα $(-2, -1)$, $(0, 1)$ και $(1, 2)$.

Παράδειγμα 2.2

Θεωρούμε την εξίσωση $\cos x - x = 0$. Αφού τη μετασχηματίσουμε στην εξίσωση $\cos x = x$, από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f_1(x) = \cos x$ και $f_2(x) = x$, γίνεται φανερό (Σχήμα 2.2) ότι υπάρχει μόνο μια λύση που βρίσκεται στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.



Σχήμα 2.2: Γραφική επίλυση της εξίσωσης $\cos x = x$

2.2.2 Εντοπισμός ριζών με το θεώρημα Bolzano

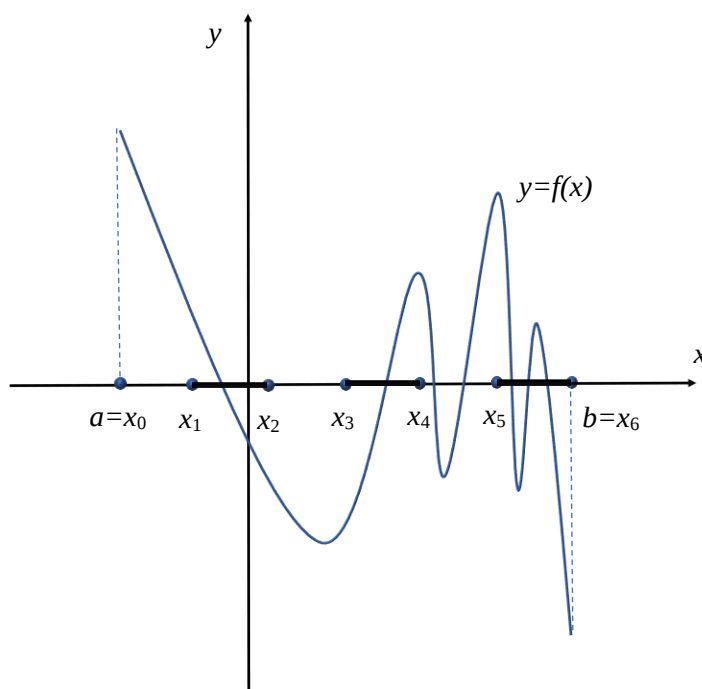
Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Bolzano)

Έστω f μια συνάρτηση που:

- (i) είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$
- (ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. ■

Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα εντός του οποίου μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε τις ρίζες μιας συνεχούς συνάρτησης f . Θεωρούμε τα $n + 1$ διαφορετικά (ισαπέχοντα) σημεία $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$ που διαμερίζουν το $[a, b]$ σε n διαστήματα πλάτους h , όπου το $h = \frac{b-a}{n}$ έχει κατάλληλα μικρή θετική τιμή. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1 στα διαστήματα $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n - 1$ εντοπίζουμε εκείνα τα διαστήματα που περιέχουν (τουλάχιστον) μια ρίζα της f , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Σάρωση του $[a, b]$ για τον εντοπισμό των ριζών της f

Η παραπάνω διαδικασία δεν είναι πάντα χωρίς προβλήματα. Για παράδειγμα στη συνάρτηση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3, η σάρωση εντοπίζει τα διαστήματα (x_1, x_2) , (x_3, x_4) και (x_5, x_6) όπου πράγματι υπάρχει ρίζα της f αλλά αποτυγχάνει να εντοπίσει το διάστημα (x_4, x_5) όπου υπάρχει άρτιο πλήθος ριζών της f . Όταν είναι εφικτό μια μελέτη της συνάρτησης f μας φανερώνει με πιο αξιόπιστο τρόπο τα διαστήματα που περιέχουν μια ή περισσότερες ρίζες της f .

Παρατήρηση 2.1

Αν η τιμή του h επιλεγεί αρκετά μεγάλη, υπάρχει ο κίνδυνος (ανάλογα και με τη μορφή της f) να υπάρχουν ρίζες σε κάποιο υποδιάστημα που να μην μπορέσουν να εντοπιστούν, ενώ αν η τιμή του h επιλεγεί πολύ μικρή, αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος.

2.3 Η μέθοδος της διχοτόμησης

Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνάρτηση συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \cdot f(b) < 0$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano (Θεώρημα 2.1), η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον

μια ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, b) . Στο Θεώρημα Bolzano στηρίζεται η μέθοδος της διχοτόμησης (Bisection method) για την προσέγγιση μιας ρίζας της f στο $[a, b]$.

2.3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Αρχικά θέτουμε $a_1 = a$ και $b_1 = b$ και υπολογίζουμε το μέσο x_1 του $[a, b]$, δηλαδή $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Στη συνέχεια αν $f(x_1) = 0$, τότε έχει βρεθεί μια ρίζα (μοναδική;) της f , δηλαδή $\hat{x} = x_1$. Διαφορετικά, εξετάζουμε το γινόμενο $f(a_1) \cdot f(x_1)$.

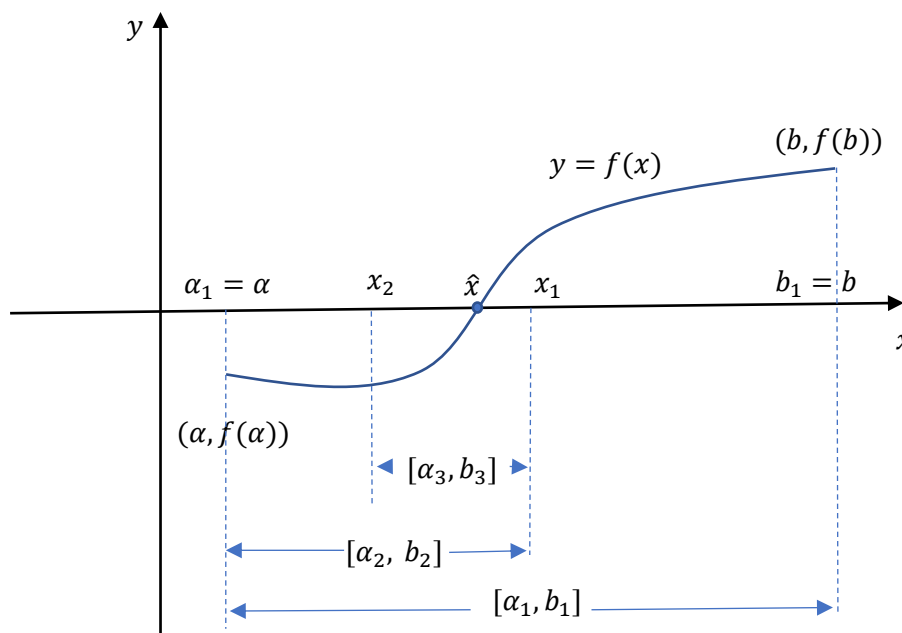
- Αν $f(a_1) \cdot f(x_1) < 0$, τότε μια ρίζα της f βρίσκεται στο διάστημα (a_1, x_1) και θέτουμε $a_2 = a_1$ και $b_2 = x_1$.
- Αν $f(a_1) \cdot f(x_1) > 0$, τότε μια ρίζα της f βρίσκεται στο διάστημα (x_1, b_1) και θέτουμε $a_2 = x_1$ και $b_2 = b_1$.

Έχουμε πλέον επιλέξει ως διάστημα που περιέχει μια ρίζα της f το διάστημα $[a_2, b_2]$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέσο του $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο διαιρώντας συνεχώς τα διαστήματα στη μέση και κρατώντας κάθε φορά εκείνο το μισό διάστημα όπου η f έχει διαφορετικά πρόσημα στα άκρα του. Έτσι, παράγεται μια ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \dots \text{ με } f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, n = 1, 2, \dots$$

και μια ακολουθία $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}, n = 1, 2, \dots$, διαδοχικών προσεγγίσεων μιας ρίζας της f . Με τον τρόπο αυτό, είτε μια ρίζα της f έχει βρεθεί ακριβώς στην περίπτωση που από σύμπτωση είναι μέσο κάποιου διαστήματος $[a_n, b_n]$ είτε η ακολουθία (x_n) , των μέσων των διαστημάτων, συγκλίνει σε μια ρίζα της f , όπως θα δείξουμε στο Θεώρημα 2.2.

2.3.2 Γεωμετρική ερμηνεία



Σχήμα 2.4: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της διχοτόμησης

2.3.3 Σύγκλιση της μεθόδου

Θεώρημα 2.2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε η ακολουθία $(x_n), n = 1, 2, \dots$ που κατασκευάζεται με τη μέθοδο της διχοτόμησης συγκλίνει για $n \rightarrow +\infty$ σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Απόδειξη. Η ακολουθία $(a_n), n = 1, 2, \dots$ των αριστερών άκρων των διαστημάτων $[a_n, b_n]$ είναι αύξουσα (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) και άνω φραγμένη από το b , άρα συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $\hat{a} \in [a, b]$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \hat{a}$. Ανάλογα, η ακολουθία των δεξιών άκρων των διαστημάτων $(b_n), n = 1, 2, \dots$ είναι φθίνουσα (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) και κάτω φραγμένη από το a , επομένως συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $\hat{b} \in [a, b]$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \hat{b}$. Επίσης,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{b - a}{2^{n-1}} \quad (2.1)$$

Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2^{n-1}} = 0$$

Οπότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \hat{b} - \hat{a} = 0 \Rightarrow \hat{a} = \hat{b} \quad (2.2)$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε όμως ότι $a_n < x_n < b_n$ οπότε σύμφωνα και με το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών και τη Σχέση (2.2) η ακολουθία (x_n) επίσης συγκλίνει και για το όριό της $\hat{x}$ ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \hat{x} = \hat{a} = \hat{b} \quad (2.3)$$

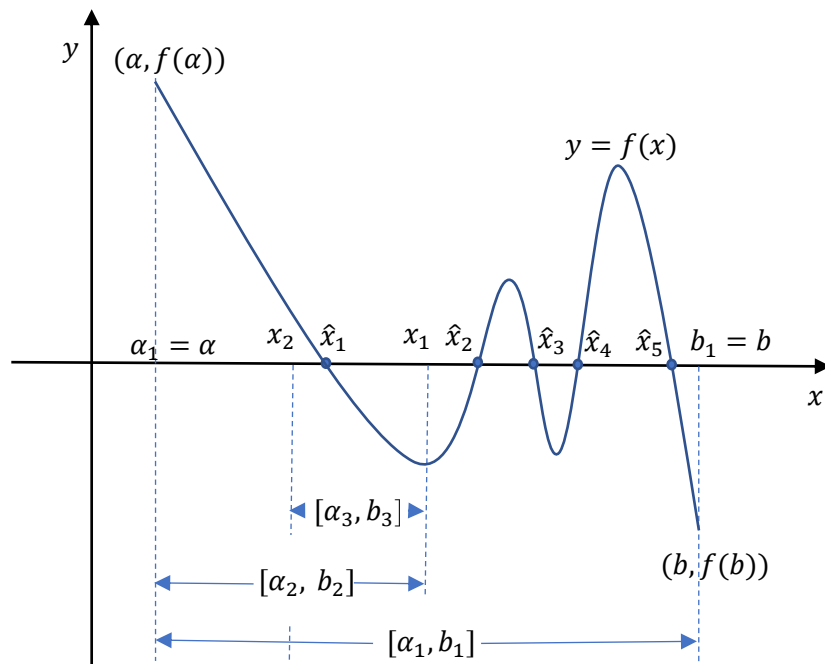
Επιπλέον, επειδή $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, n = 1, 2, \dots$ και ακόμα οι ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ είναι συγκλίνουσες και η f είναι συνεχής θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(a_n)f(b_n)) \leq 0 \Rightarrow f(\hat{a})f(\hat{b}) \leq 0.$$

Λόγω της Σχέσης (2.3) έχουμε $f^2(\hat{x}) \leq 0$ και επειδή προφανώς $f^2(\hat{x}) \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(\hat{x}) = 0$. Άρα το όριο $\hat{x}$ της ακολουθίας των μέσων x_n των διαστημάτων $[a_n, b_n], n = 0, 1, 2, \dots$ είναι τελικά ρίζα της f . ■

Παρατήρηση 2.2

Στην περίπτωση που η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμόζεται σε ένα διάστημα όπου η f έχει περισσότερες από μία ρίζες, τότε θα προσεγγίσει μία από αυτές. Στο παράδειγμα της συνάρτησης στο Σχήμα 2.5 που ακολουθεί, όταν εφαρμοστεί η μέθοδος της διχοτόμησης στο διάστημα $[a, b]$ προσεγγίζεται μόνο η ρίζα $\hat{x}_1$ ενώ δεν εντοπίζονται οι ρίζες $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5$. Μια λύση θα ήταν να έχει προηγηθεί μια σάρωση του $[a, b]$ (Παράγραφος 2.2.2) με κατάλληλη μικρή τιμή του h .



Σχήμα 2.5: Η μέθοδος της διχοτόμησης σε διάστημα με περισσότερες από μία ρίζες

2.3.4 Εκτίμηση σφάλματος

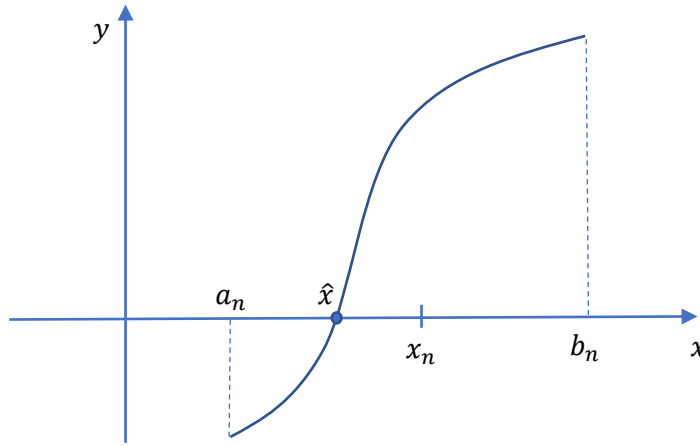
Ας θεωρήσουμε ότι μετά από τις n πρώτες επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης έχει επιλεγθεί το διάστημα $[a_n, b_n]$ με $f(a_n)f(b_n) < 0$ (Σχήμα 2.6). Για το σφάλμα $|x_n - \hat{x}|$ ισχύει:

$$|x_n - \hat{x}| < \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{b-a}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^n}, n = 1, 2, \dots$$

Επομένως, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

Εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης

$$|x_n - \hat{x}| < \frac{b-a}{2^n}, n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.6: Εκτίμηση σφάλματος $|x_n - \hat{x}|$

Πλήθος επαναλήψεων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση μιας ρίζας με δεδομένη ακρίβεια

Συχνά είναι επιθυμητό να υπολογίσουμε εκ των προτέρων το απαραίτητο πλήθος επαναλήψεων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση μιας ρίζας με κάποια δεδομένη ακρίβεια. Όταν ζητείται το σφάλμα να είναι μικρότερο ή ίσο του ε ($\varepsilon > 0$ δεδομένη ακρίβεια), τότε λόγω της εκτίμησης σφάλματος (2.4) αρκεί το φράγμα για το σφάλμα να είναι το πολύ ε , οπότε έχουμε:

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow 2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow \log 2^n \geq \log \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n \log 2 \geq \log(b-a) - \log \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2}$$

Απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου της διχοτόμησης για ακρίβεια ε

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2} \quad (2.5)$$

2.3.5 Κριτήρια τερματισμού της μεθόδου της διχοτόμησης

Επιδύοντας αριθμητικά μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$ με τη μέθοδο της διχοτόμησης πρέπει να εφοδιάσουμε τη μέθοδο με ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού. Στις επαναληπτικές διαδικασίες για την προσέγγιση μιας ρίζας της συνάρτησης f , ισχύει η γενική αρχή ότι κάθε κριτήριο τερματισμού είναι δυνατό υπό ορισμένες συνθήκες να «ξεγελαστεί». Γι' αυτό μια καλή πρακτική είναι να χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός κριτηρίων και γιατί όχι και ένα κριτήριο τερματισμού βάσει του μέγιστου επιτρεπόμενου αριθμού επαναλήψεων.

Κριτήρια τερματισμού για τη μέθοδο της διχοτόμησης

(i) $\frac{b_n - a_n}{2} \leq \varepsilon$

(ii) $|f(x_n)| < TOL$

(iii) $n > N_{max}$

Οι σταθερές ε (απαιτούμενη ακρίβεια), TOL (η ανοχή ώστε μια τιμή να μην θεωρείται μηδέν) και N_{max} (ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων που επιτρέπονται) καθορίζονται από τον χρήστη. Το βασικό κριτήριο τερματισμού της μεθόδου της διχοτόμησης είναι το (i), το οποίο στηρίζεται στην εκτίμηση σφάλματος της Σχέσης (2.4) και διακόπτει τις επαναλήψεις όταν το φράγμα για το σφάλμα στη n -οστή επανάληψη έχει μειωθεί και είναι μικρότερο από τη σταθερά ε . Βέβαια, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά αυτό το κριτήριο τερματισμού είναι πιθανό μια πολύ ακριβής ενδιάμεση προσέγγιση¹ «να χαθεί» επειδή δεν ικανοποιήθηκε το κριτήριο (i) και η μέθοδος να συνεχίσει και να προσεγγίσει εκ νέου τη ρίζα πολύ αργότερα όταν ικανοποιηθεί το κριτήριο.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x - 0.499$ στο $[0,1]$. Η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμόζεται για την προσέγγιση της ρίζας $\hat{x} = 0.499$ με κριτήριο τερματισμού $\frac{b_n - a_n}{2} \leq 10^{-2}$. Η μέθοδος για $n = 1$ δίνει $x_1 = 0.5$ πολύ κοντά στη $\hat{x}$ με ακριβές σφάλμα $|x_1 - \hat{x}| = 0.001 < 10^{-2}$. Όμως επειδή το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται αφού

$$\frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{1 - 0}{2} = 0.5 > 10^{-2}$$

η μέθοδος συνεχίζεται και λαμβάνουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις (Πίνακας 2.1)².

n	a_n	b_n	x_n	$\frac{b_n - a_n}{2}$	Ακριβές σφάλμα
1	0(−)	1(+)	0.5(+)	0.5	0.001
2	0(−)	0.5(+)	0.25(−)	0.25	0.249
3	0.25(−)	0.5(+)	0.375(−)	0.125	0.124
4	0.375(−)	0.5(+)	0.4375(−)	0.0625	0.0615
5	0.4375(−)	0.5(+)	0.46875(−)	0.03125	0.03025
6	0.46875(−)	0.5(+)	0.484375(−)	0.015625	0.014625
7	0.484375(−)	0.5(+)	0.4921875(−)	0.0078125	0.0068125

Πίνακας 2.1

Η μέθοδος επιτυχώς διακόπτεται στην 7^η επανάληψη με το σύνηθες κριτήριο τερματισμού της μεθόδου διχοτόμησης αλλά η προσέγγιση x_7 , με ακριβές σφάλμα $|x_7 - \hat{x}| = 0.0068125$, υπολείπεται της προσέγγισης x_1 που «απερίσκεπτα» απορρίφθηκε από τη μέθοδο.

¹ η προσέγγιση x_n βρίσκεται πολύ κοντά στη ρίζα $\hat{x}$, δηλαδή η ποσότητα $|x_n - \hat{x}|$ είναι εξαιρετικά μικρή.

² Σε παρένθεση δίνεται το πρόσημο της τιμής της συνάρτησης f στο αντίστοιχο σημείο.

2.3.6 Αλγόριθμος της μεθόδου της διχοτόμησης

Προσέγγιση μιας ρίζας της συνάρτησης f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν οι τιμές $f(a)$ και $f(b)$ είναι ετερόσημες.

Είσοδος: Η συνάρτηση f , τα άκρα του διαστήματος a, b , η απαιτούμενη ακρίβεια ε , η ανοχή TOL ώστε μια τιμή να θεωρείται 0 και ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επαναλήψεων N_{max} .

Έξοδος: Η προσέγγιση μιας ρίζας ή ένα μήνυμα αποτυχίας προσέγγισης ρίζας σε N_{max} επαναλήψεις.

1° Βήμα: Θέσε αριθμό επανάληψης $n = 1$.

2° Βήμα: Όσο $n \leq N_{max}$ επανάλαβε τα βήματα 3 έως 8.

3° Βήμα: Υπολόγισε $x = a + \frac{b-a}{2}$.

4° Βήμα: Αν $\frac{b-a}{2} \leq \varepsilon$, τότε η τιμή x είναι προσέγγιση μιας ρίζας της f . **STOP**

5° Βήμα: Υπολόγισε $f(x)$

6° Βήμα: Αν $|f(x)| \leq TOL$, τότε η τιμή x δίνει στην f τιμή σχεδόν μηδέν. **STOP**

7° Βήμα: Θέσε $n = n + 1$.

8° Βήμα: Αν $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(x))$, τότε θέσε $b = x$, αλλιώς θέσε $a = x$.

9° Βήμα: Η μέθοδος απέτυχε να προσεγγίσει μια ρίζα της f σε N_{max} επαναλήψεις. **STOP**

Παρατήρηση 2.3

Αντί του τύπου $\frac{a+b}{2}$ το μέσο του διαστήματος $[a, b]$ στον αλγόριθμο 2.3.6 για λόγους αριθμητικής ευστάθειας (βλέπε Λυμένη άσκηση 2 του Κεφαλαίου 1) υπολογίστηκε εναλλακτικά από τον μαθηματικά ισοδύναμο τύπο $a + \frac{b-a}{2}$.

Παρατήρηση 2.4

Όταν ο αλγόριθμος 2.3.6 έχει εφαρμοστεί για αρκετές επαναλήψεις οι τιμές a_n, b_n, x_n , που στον αλγόριθμο σημειώνονται ως a, b, x , έχουν (όπως αναμενόταν) πλησιάσει πάρα πολύ μεταξύ τους και οι τιμές $f(a_n), f(x_n)$ που σημειώνονται με $f(a), f(x)$ είναι (όπως ήταν αναμενόμενο) σχεδόν μηδέν. Σε αυτήν την περίπτωση το γινόμενο $f(a) \cdot f(x)$ είναι δυνατόν να δημιουργήσει προβλήματα underflow (βλέπε Κεφάλαιο 1). Επιλέχθηκε λοιπόν αντί να ελέγχεται το πρόσημο του γινομένου ($f(a) \cdot f(x) < 0$) να γίνεται έλεγχος αν τα πρόσημα (sign) των πραγματικών αριθμών $f(a), f(x)$ είναι διαφορετικά, δηλαδή αν

$$\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(x))$$

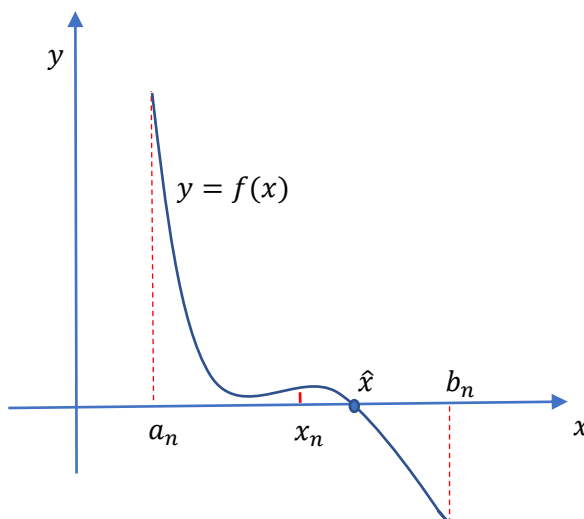
Παρατήρηση 2.5

Στον αλγόριθμο 2.3.6 θα μπορούσαμε να μην χρησιμοποιήσουμε ως συμπληρωματικό κριτήριο τερματισμού τον μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό επαναλήψεων N_{max} , γιατί όπως αποδείχτηκε και στο Θεώρημα σύγκλισης 2.2, το κριτήριο $\frac{b-a}{2} \leq \varepsilon$ θα ικανοποιηθεί αναγκαστικά κάποια στιγμή αφού τα μήκη των υποδιαστημάτων τείνουν στο μηδέν. Σε περίπτωση όμως που (ίσως από κακή εκτίμηση) η τιμή του ε επιλεγεί προβληματικά μικρή, τότε τα σφάλματα στρογγύλευσης μπορεί να οδηγήσουν σε ατέρμονα βρόχο. Σε αυτήν την περίπτωση ένα κριτήριο τερματισμού που επιτρέπει τη συνέχιση των επαναλήψεων όσο $n \leq N_{max}$ μπορεί να αποδειχθεί σωτήριο.

Παρατήρηση 2.6

Στην περιγραφή της μεθόδου (Παράγραφος 2.3.1) υπάρχει σε κάθε επανάληψη ο έλεγχος αν (από σύμπτωση) το μέσο του διαστήματος είναι η ρίζα της συνάρτησης, δηλαδή αν $f(x_n) = 0$. Στον αλγόριθμο 2.3.6 αυτός ο έλεγχος έχει αντικατασταθεί με το κριτήριο τερματισμού $|f(x)| < TOL$, δηλαδή ελέγχουμε αν το μέσο x του τελευταίου διαστήματος δίνει στην f την τιμή μηδέν ή μια τιμή εξαιρετικά κοντά στο μηδέν. Στην περίπτωση

που $|f(x)| < TOL$ αλλά $f(x) \neq 0$, παρόλο που το x δεν είναι ρίζα (από μαθηματική άποψη), όμως έχει τα χαρακτηριστικά μιας ρίζας και συχνά (π.χ. σε προβλήματα συντονισμού κατά την ταλάντωση μιας κατασκευής) έχει την επίδραση στο φυσικό πρόβλημα που θα είχε μια ρίζα (βλέπε Σχήμα 2.7 παρακάτω).



Σχήμα 2.7: Γράφημα συνάρτησης που η n -οστή επανάληψη της μεθόδου της διχοτόμησης δίνει $f(x_n) \approx 0$

2.3.7 Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 5$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η f έχει μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$. Πράγματι, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και στο $[2, 3]$. Επιπλέον

$$f(2) \cdot f(3) = (-3) \cdot (13) = -39 < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f στο $(2, 3)$ και επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της διχοτόμησης στο διάστημα $[2, 3]$. Ας εκτελέσουμε μερικές επαναλήψεις για να δείξουμε τη διαδικασία της μεθόδου:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	2 (-)	3 (+)	2.5 (+)	3.125
2	2 (-)	2.5 (+)	2.25 (-)	-0.359375
3	2.25 (-)	2.5 (+)	2.375 (+)	1.271484
4	2.25 (-)	2.375 (+)	2.3125 (+)	0.428955
5	2.25 (-)	2.3125 (+)	2.28125 (+)	0.028107
6	2.25 (-)	2.28125 (+)	2.265625 (-)	-0.167294
7	2.265625 (-)	2.28125 (+)	2.2734375 (-)	-0.070010
8	2.2734375 (-)	2.28125 (+)	2.27734375 (-)	-0.021056
9	2.27734375 (-)	2.28125 (+)	2.279296875 (+)	0.003499
10	2.27734375 (-)	2.279296875 (+)	2.278320313 (-)	-0.008785

Πίνακας 2.2: Μέθοδος της διχοτόμησης για το Παράδειγμα 2.3

Η εκτίμηση σφάλματος δίνεται από τη Σχέση (2.4) και για $n = 10$ είναι

$$|\hat{x} - x_{10}| \leq \frac{3-2}{2^{10}} = 0.0009765625$$

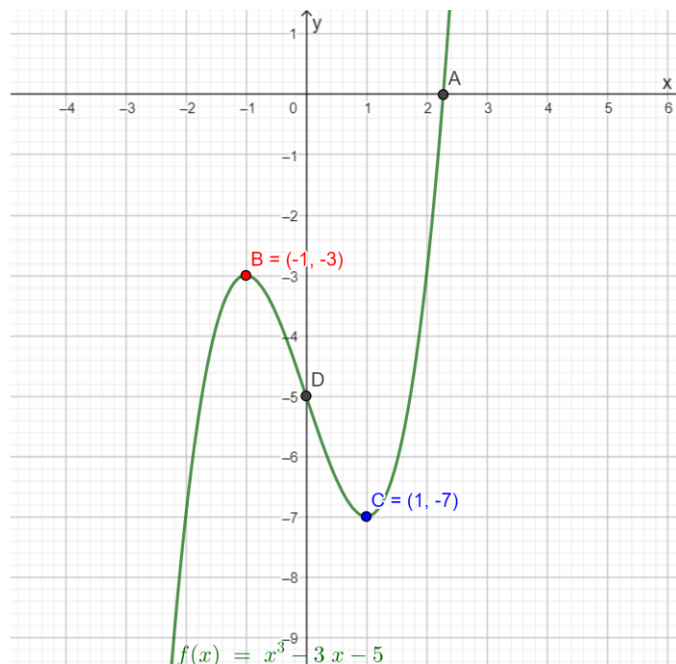
Αν επιθυμούσαμε να υπολογίσουμε τη ρίζα με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων και στρογγύλευση θα αρκούσε

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \Rightarrow \frac{3-2}{2^n} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^6} \Rightarrow 2^n \geq 2 \cdot 10^6 \Rightarrow n \geq \frac{\log 2 + 6}{\log 2} = 20.932$$

άρα με $n = 21$ επαναλήψεις είναι εξασφαλισμένη η ζητούμενη ακρίβεια. Για να εξετάσουμε αν η f έχει και άλλες ρίζες υπολογίζουμε την παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$ που έχει ρίζες $x = \pm 1$. Στη συνέχεια δημιουργούμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f (Πίνακας 2.3) και σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση (Σχήμα 2.8). Το τοπικό μέγιστο $f(-1) = -3$ είναι αρνητικός αριθμός, άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ που με τη μέθοδο της διχοτόμησης προσεγγίστηκε από την τιμή 2.278320313.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$		-3 <i>max</i>	-7 <i>min</i>	

Πίνακας 2.3: Πίνακας μεταβολών της $f(x) = x^3 - 3x - 5$



Σχήμα 2.8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x - 5$

Παράδειγμα 2.4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$. Προκειμένου να εντοπίσουμε γραφικά ένα διάστημα που να περιέχει κάποια ρίζα της f κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = \cos x$ και $f_2(x) = x$ (Σχήμα 2.2). Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2 τέμνονται και ότι η λύση της

εξίσωσης $f_1(x) = f_2(x)$ ανήκει στο διάστημα $[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα θα είναι συνεχής και στο $[0,1]$. Ακόμα

$$f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot (\cos 1 - 1) = -0.460 < 0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano και η μέθοδος της διχοτόμησης μπορεί να εφαρμοστεί. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε μια προσέγγιση x_n της ρίζας $\hat{x}$ της f με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή τέτοια ώστε $|x_n - \hat{x}| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$. Επομένως αρκεί:

$$\frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \Rightarrow b_n - a_n \leq 10^{-2}$$

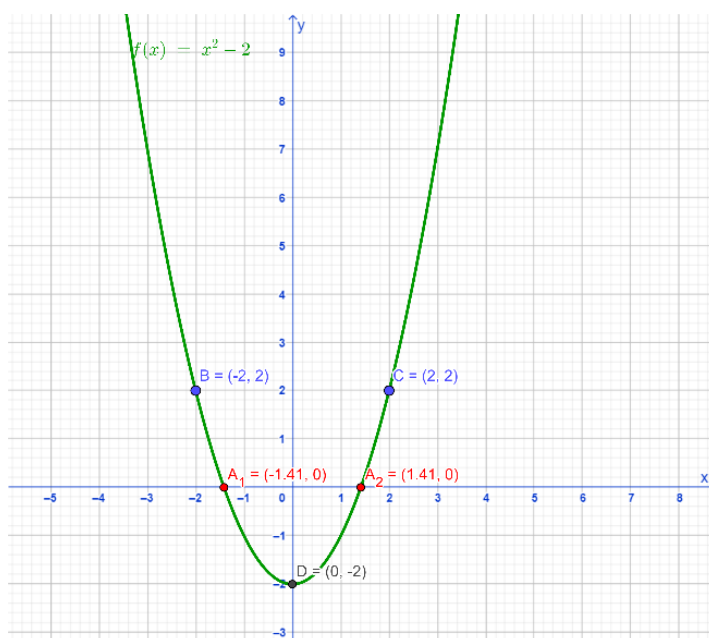
Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα τελικά απαιτήθηκαν 8 επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
1	0(+)	1(-)	0.5(+)	0.377582562	1
2	0.5(+)	1(-)	0.75(-)	-0.018311131	0.5
3	0.5(+)	0.75(-)	0.625(+)	0.185963120	0.25
4	0.625(+)	0.75(-)	0.6875(+)	0.085334946	0.125
5	0.6875(+)	0.75(-)	0.71875(+)	0.033879372	0.0625
6	0.71875(+)	0.75(-)	0.734375(+)	0.007874725	0.03125
7	0.734375(+)	0.75(-)	0.7421875(-)	-0.005195712	0.015625
8	0.734375(+)	0.7421875(-)	0.73828125(+)	0.001345150	0.0078125

Πίνακας 2.4: Επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης για την προσέγγιση της ρίζας της $f(x) = \cos x - x$

Παράδειγμα 2.5

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ με προφανή θετική ρίζα τη $\hat{x} = \sqrt{2}$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,2]$ αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,2]$ και $f(1) \cdot f(2) < 0$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης προκειμένου να προσεγγίσουμε τη $\hat{x}$ με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-2}$.



Σχήμα 2.9: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - \sqrt{2} $
1	1(-)	2(+)	1.5(+)	0.25	0.08578644
2	1(-)	1.5(+)	1.25(-)	-0.4375	0.16421356
3	1.25(-)	1.5(+)	1.375(-)	-0.109375	0.03921356
4	1.375(-)	1.5(+)	1.4375(+)	0.06640625	0.02328644
5	1.375(-)	1.4375(+)	1.40625(-)	-0.0224609	0.00796356

Πίνακας 2.5: Επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης για την προσέγγιση της θετικής ρίζας της $f(x) = x^2 - 2$

Από τη Σχέση (2.5) υπολογίζουμε τον απαιτούμενο αριθμό επαναλήψεων ώστε να είναι εξασφαλισμένη η προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$n \geq \frac{\log(2-1) - \log 10^{-2}}{\log 2} = \frac{2}{\log 2} = 6.64.$$

Δηλαδή, απαιτούνται $n = 7$ επαναλήψεις. Όμως, η εφαρμογή της μεθόδου της διχοτόμησης (Πίνακας 2.5) πέτυχε να υπολογίσει μία προσέγγιση της ρίζας με την επιθυμητή ακρίβεια σε μόλις 5 επαναλήψεις. Αυτό δεν βρίσκεται σε αντίφαση με το θεωρητικό αριθμό επαναλήψεων $n = 7$ που υπολογίστηκε από τη Σχέση (2.5) και που συχνά στην πράξη αποδεικνύεται υπερεκτιμημένος.

Παράδειγμα 2.6

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3x-2}$ με $x \in [0, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1]$. Η συνάρτηση f έχει αντίθετα πρόσημα στα σημεία 0 και 1 αφού

$$f(0) \cdot f(1) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

Παρά το γεγονός ότι δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano (αφού η f δεν ορίζεται σε όλο το κλειστό διάστημα $[0,1]$) θέλουμε να ερευνήσουμε που θα συγκλίνει η μέθοδος της διχοτόμησης αν αυτή **καταχρηστικά** εφαρμοστεί.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	0(-)	1(+)	0.5(-)	-2
2	0.5(-)	1(+)	0.75(+)	4
3	0.5(-)	0.75(+)	0.625(-)	-8
4	0.625(-)	0.75(+)	0.6875(+)	16
5	0.625(-)	0.6875(+)	0.65625(-)	-32
6	0.65625(-)	0.6875(+)	0.671875(+)	64
7	0.65625(-)	0.671875(+)	0.6640625(-)	-128
8	0.6640625(-)	0.671875(+)	0.66796875(+)	256
9	0.6640625(-)	0.66796875(+)	0.666015625(-)	-512
10	0.666015625(-)	0.66796875(+)	0.6669921875(+)	1024
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Πίνακας 2.6: Επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3x-2}$ στο διάστημα με άκρα 0 και 1

Παρατηρούμε ότι ακολουθία (x_n) συγκλίνει στην τιμή $\frac{2}{3}$ που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και προφανώς δεν είναι ρίζα της f .